View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Elsevier - Publisher Connector

JOURNAL OF ALGEBRA 81, 279–294 (1983)

Kohärenz in Kategorien mit Gruppenstruktur, II

K.-H. ULBRICH

Mathematisches Seminar der Universität Hamburg, Bundesstr. 55, D–2 Hamburg 13, Bundesrepublik Deutschland

Communicated by Saunders MacLane

Received May 4, 1981

In dieser Arbeit wird die Kohärenz von monoidalen Funktoren $\Gamma: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ zwischen Kategorien mit Gruppenstruktur untersucht ([1] für monoidale Kategorien, [5] für geschlossene Kategorien), die Kohärenz natürlicher Transformationen $\chi: \Lambda \to \Gamma$ zwischen solchen Funktoren ([3] für geschlossene Kategorien) und die Kohärenz einer G-Modulstruktur auf einer Kategorie, G eine Gruppe.

Unsere Untersuchung wurde motiviert durch das folgende Beispiel: eine Gruppe G operiere auf einem kommutativen Ring S durch Ringautomorphismen; dann induziert diese Operation eine G-Modulstruktur auf der Kategorie $\mathscr{P}ic(S)$ der projektiven S-Moduln vom Rang 1, cf. Hattori [2, Sect. 1]. In Abschnitt 4 beweisen wir insbesondere, daß diese G-Modulstruktur kohärent ist.

Die Beweise für die folgenden Sätze sind im wesentlichen Ergänzungen der Beweise aus [7] und wurden als solche bereits in einer früheren Version dieser Arbeit gegeben. Anregende Gespräche mit Mitsuhiro Takeuchi und eine Schrift von Laplaza [4] veranlaßten uns jedoch zu einigen technischen Änderungen. Die wichtigsten sind: (a) Wir verwenden eine einfachere Methode, Kohärenz zu definieren, indem wir eine Struktur kohärent nennen, wenn jeweils eine gewisse Kategorie $\mathscr{K}$ atomar ist; die Definition von $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ (Abschnitt 1) gab Mitsuhiro Takeuchi. Diese Methode, Kohärenz zu definieren, benutzte auch Solian in [6]. (b) Nach einer Idee von Laplaza [4] führen wir in den Beweisen eine Reduktion von $\mathscr{K}$ auf eine Faktorisierung $\bar{\mathscr{K}} = \mathscr{K}/\mathscr{K}'$ durch, wobei $\mathscr{K}'$ die "monoidalen" Morphismen in $\mathscr{K}$ enthält. Durch diese Änderungen lassen sich auch die Beweise in [7] vereinfachen.

Wir behalten die Notation von [7] bei, nach der wir eine Komposition $u \xrightarrow{g} v \xrightarrow{h} w$ von Morphismen mit $g \circ h$ oder gh bezeichnen und den zu g inversen Morphismus mit g^*; in einer Kategorie mit Gruppenstruktur ist jeder Morphismus ein Isomorphismus. Die Symbole $\langle\,.\,\rangle$ und $[\,,\,]$ seien wie in [7] definiert.

0021-8693/83 $3.00
Copyright © 1983 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

0. Einige Grundbegriffe und Definitionen

(0.1) Es sei $\varepsilon: \mathscr{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ eine Abbildung einer Menge $\mathscr{A}$ in die Objektklasse einer Kategorie $\mathscr{C}$. Wir definieren eine Kategorie $\mathscr{A}^{\varepsilon}$ durch

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{A}^{\varepsilon}) = \mathscr{A}, \qquad \mathscr{A}^{\varepsilon}(u, v) = \mathscr{C}(\varepsilon(u), \varepsilon(v)), \qquad \forall u, v \in \mathscr{A},$$

mit der von $\mathscr{C}$ induzierten Komposition. Die Abbildung $\varepsilon: \mathscr{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ läßt sich zu einem volltreuen Funktor $\varepsilon: \mathscr{A}^{\varepsilon} \to \mathscr{C}$ fortsetzen, indem man einen $\mathscr{A}^{\varepsilon}$-Morphismus $g: u \to v$ auf den $\mathscr{C}$-Morphismus $g: \varepsilon(u) \to \varepsilon(v)$ abbildet.

(0.2) Eine Kategorie $\mathscr{K}$ heißt atomar, wenn zu je zwei Objekten u, v aus $\mathscr{K}$ höchstens ein $\mathscr{K}$-Morphismus $u \to v$ existiert. Es sei $\mathscr{K}'$ eine atomare Unterkategorie einer Kategorie $\mathscr{K}$ mit $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}' = \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, und jeder $\mathscr{K}'$-Morphismus sei ein Isomorphismus. Dann läßt sich nach Laplaza [4] folgendermaßen eine zu $\mathscr{K}$ äquivalente Kategorie $\mathscr{K}/\mathscr{K}'$ bilden. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$ durch:

$u \sim u'$ genau dann, wenn ein $\mathscr{K}'$-Morphismus $u \to u'$ existiert, und eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mor}\,\mathscr{K}$ durch: $g: u \to v$ äquivalent zu $g': u' \to v'$ genau dann, wenn $\mathscr{K}'$-Morphismen $\alpha: u \to u'$ und $\beta: v \to v'$ existieren mit

$$u \xrightarrow{g} v \xrightarrow{\beta} v' \qquad \text{gleich} \qquad u \xrightarrow{\alpha} u' \xrightarrow{g'} v'.$$

Es bezeichne $\bar{u}$, bzw. $\bar{g}$ die Äquivalenzklasse von $u \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, bzw. $g \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{K}$. Für $\mathscr{K}$-Morphismen $g: u \to v$, $h: w \to z$ gelte $v \sim w$, so daß ein $\mathscr{K}'$-Morphismus $\alpha: v \to w$ existiert; dann sei $\bar{g} \circ \bar{h} := \overline{g \circ \alpha \circ h}$. Dies ist die Komposition für die Kategorie $\mathscr{K}/\mathscr{K}'$, deren Objekte die Äquivalenzklassen $\bar{u}$, $u \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, sind, und in der ein Morphismus $\bar{u} \to \bar{v}$ die Äquivalenzklasse $\bar{g}$ eines $\mathscr{K}$-Morphismus $g: u \to v$ ist. Der Funktor

$$\pi: \mathscr{K} \to \mathscr{K}/\mathscr{K}', \qquad \pi(u) = \bar{u}, \qquad \pi(g) = \bar{g},$$

$u \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, $g \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{K}$, ist volltreu und damit eine Äquivalenz. Es sei bemerkt, daß sich jede Äquivalenz $\mathscr{K} \to \mathscr{L}$, für die $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{L}$ surjektiv ist, auf diese Weise beschreiben läßt.

Es sei $\Gamma: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ ein Funktor, der $\mathscr{K}'$ in eine atomare Unterkategorie $\mathscr{L}'$ von $\mathscr{L}$ mit $\mathrm{Ob}\,\mathscr{L} = \mathrm{Ob}\,\mathscr{L}'$ überführe, und jeder $\mathscr{L}'$-Morphismus sei ein Isomorphismus. Dann induziert Γ einen Funktor $\Gamma: \mathscr{K}/\mathscr{K}' \to \mathscr{L}/\mathscr{L}'$ durch $\Gamma(\bar{u}) = \overline{\Gamma(u)}$ und $\Gamma(\bar{g}) = \overline{\Gamma(g)}$ für $u \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$, $g \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{K}$.

(0.3) Es sei g ein Morphismus in einer Kategorie $\mathscr{K}$ mit Gruppenstruktur. Wir definieren die Menge $\mathbf{E}(g) \subset \mathrm{Mor}\,\mathscr{K}$ der Expansionen von g rekursiv durch: (1) $g, g^{-1}, g^{-1^{-1}}, \ldots \in \mathbf{E}(g)$, (2) für $h \in \mathbf{E}(g)$ ist $id_u \cdot h$ und $h \cdot id_u$ in $\mathbf{E}(g)$, $\forall u \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$.

(0.4) Unter einer Ω-Algebra $\mathscr{A}$ mit $\Omega = \{\cdot, S, {}^{-1}\}$ verstehen wir eine Menge (oder Klasse) $\mathscr{A}$ zusammen mit drei Abbildungen

$$\cdot : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}, \qquad S: \mathscr{A} \to \mathscr{A}, \qquad {}^{-1}: \mathscr{A} \to \mathscr{A},$$

von denen die mittlere konstant sei (alle Elemente gehen auf $S \in \mathscr{A}$). Insbesondere fassen wir die Objektklasse $\mathscr{A} = \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ einer Kategorie mit Gruppenstruktur $\mathscr{C}$ kanonisch als eine Ω-Algebra auf. Ω-Homomorphismen sind Abbildungen, die die Operatoren $\cdot$, S, ${}^{-1}$ respektieren.

1. Kohärenz eines monoidalen Funktors $\Gamma: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$

Es seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ Kategorien versehen mit einer Gruppenstruktur, also mit einem Produkt $\cdot$, einem Einsobjekt S, einer Inversenbildung ${}^{-1}$ und mit natürlichen Transformationen a, e, f, i, j wie in [7]. Es sei $\Gamma: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ein Funktor versehen mit einer natürlichen Transformation t von

$$\mathscr{C}^2 \xrightarrow{\ \cdot\ } \mathscr{C} \xrightarrow{\ \Gamma\ } \mathscr{D} \qquad \text{nach} \qquad \mathscr{C}^2 \xrightarrow{\Gamma \times \Gamma} \mathscr{D}^2 \xrightarrow{\ \cdot\ } \mathscr{D}.$$

Wir nennen einen solchen Funktor monoidal, und im Fall $t = id$ strikt monoidal. Um einen Kohärenzbegriff für $\Gamma = (\Gamma, t)$ zu definieren, benutzen wir die folgenden Kategorien $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ und $\mathscr{K}_{\Gamma}$.

Es sei $\mathbf{N}$ die Menge der Symbole $\mathbf{s}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots$ und $\varepsilon_{\mathscr{C}}: \mathbf{N} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ eine Abbildung mit $\varepsilon_{\mathscr{C}}(\mathbf{s}) = S_{\mathscr{C}}$. $\mathscr{A}$ bezeichne die kleinste Menge von Wörtern über dem Alphabet

$$\wedge, (\,,\,), {}^{-1}, \mathbf{s}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots \tag{1}$$

mit den Eigenschaften: $\mathbf{N} \subset \mathscr{A}$, mit $u, v \in \mathscr{A}$ ist $(u \wedge v)$ und $(v)^{-1}$ in $\mathscr{A}$. $\mathscr{A}$ ist eine (freie) Ω-Algebra mit den Operatoren

$$u \cdot v = (u \wedge v), \qquad S = \mathbf{s}, \qquad v^{-1} = (v)^{-1}, \tag{2}$$

$\forall u, v \in \mathscr{A}$. Die Abbildung $\varepsilon_{\mathscr{C}}$ läßt sich eindeutig fortsetzen zu einem Ω-Homomorphismus $\varepsilon: \mathscr{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ und dieser zu dem volltreuen Funktor $\varepsilon: \mathscr{A}^{\varepsilon} \to \mathscr{C}$, cf. (0.1). Die Ω-Operatoren (2) auf $\mathscr{A} = \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^{\varepsilon}$ erweitern wir kanonisch zu Funktoren

$$\cdot : \mathscr{A}^{\varepsilon} \times \mathscr{A}^{\varepsilon} \to \mathscr{A}^{\varepsilon}, \qquad S: \mathscr{A}^{\varepsilon} \to \mathscr{A}^{\varepsilon}, \qquad {}^{-1}: \mathscr{A}^{\varepsilon} \to \mathscr{A}^{\varepsilon},$$

so daß wir $\mathscr{A}^{\varepsilon}$ über die in $\mathscr{C}$ vorhandenen natürlichen Transformationen a, e, f, i, j als eine Kategorie mit Gruppenstruktur auffassen können. Die

Unterkategorie $\mathscr{K}_{\mathscr{C}} = \mathscr{K}_{\mathscr{C}}(\varepsilon_{\mathscr{C}})$ von $\mathscr{A}^{\varepsilon}$ sei nun rekursiv definiert durch: $\operatorname{Ob} \mathscr{K}_{\mathscr{C}} = \operatorname{Ob} \mathscr{A}^{\varepsilon}$, die Morphismen id_v und

$$a_{u,v,w},\ e_v, f_v,\ i_v, j_v \tag{3}$$

mit $u, v, w \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}^{\varepsilon}$ sind in $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$, mit g, h aus $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ sind $g \cdot h$, g^{-1}, $g \circ h$ (wenn definiert), g^* in $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$.

Wir nennen $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ *die Hülle der $\mathscr{A}^{\varepsilon}$-Morphismen* (3). $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ ist wie $\mathscr{A}^{\varepsilon}$ eine Kategorie mit Gruppenstruktur, und die Restriktion von $\varepsilon: \mathscr{A}^{\varepsilon} \to \mathscr{C}$ auf $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ ergibt einen strikt monoidalen Funktor $\varepsilon: \mathscr{K}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}$, der offenbar treu ist. Man sieht leicht, daß $\mathscr{C}$ genau dann kohärent ist im Sinn von [7], wenn die Kategorien $\mathscr{K}_{\mathscr{C}} = \mathscr{K}_{\mathscr{C}}(\varepsilon_{\mathscr{C}})$ für alle $\varepsilon_{\mathscr{C}}$ atomar sind.

Es sei nun ferner eine Abbildung $\varepsilon_{\mathscr{D}}: \mathbf{N} \to \operatorname{Ob} \mathscr{D}$ mit $\varepsilon_{\mathscr{D}}(\mathbf{s}) = S_{\mathscr{D}}$ gegeben. $\mathscr{A}_{\Gamma}$ sei die kleinste Menge von Wörtern über dem Alphabet

$$\wedge, (\,,\,), {}^{-1}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{s}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots \tag{4}$$

mit den Eigenschaften: $\mathbf{N} \subset \mathscr{A}_{\Gamma}$, für $v \in \mathscr{A}$ ist $\mathbf{\Gamma}(v)$ in $\mathscr{A}_{\Gamma}$, für $u, v \in \mathscr{A}_{\Gamma}$ ist $(u \wedge v)$ und $(v)^{-1}$ in $\mathscr{A}_{\Gamma}$. Die Abbildungen $\varepsilon_{\mathscr{D}}$ und $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{A}) \to \operatorname{Ob} \mathscr{D}$, $\mathbf{\Gamma}(v) \to \Gamma(\varepsilon(v))$, lassen sich eindeutig zu einem Ω-Homomorphismus

$$\varepsilon: \mathscr{A}_{\Gamma} \to \operatorname{Ob} \mathscr{D}$$

fortsetzen. Die Kategorie $\mathscr{A}_{\Gamma}^{\varepsilon}$ ist wie $\mathscr{A}^{\varepsilon}$ eine Kategorie mit Gruppenstruktur, und man hat einen strikt monoidalen Funktor $\varepsilon: \mathscr{A}_{\Gamma}^{\varepsilon} \to \mathscr{D}$, (0.1). Ferner haben wir nach Konstruktion einem Funktor $\Gamma: \mathscr{A}^{\varepsilon} \to \mathscr{A}_{\Gamma}^{\varepsilon}$, $v \to \mathbf{\Gamma}(v)$, den wir über die $\mathscr{D}$-Morphismen $t_{P,Q}: \Gamma(PQ) \to \Gamma(P)\,\Gamma(Q)$ als einen monoidalen Funktor von Kategorien mit Gruppenstruktur auffassen. Wir definieren nun $\mathscr{K}_{\Gamma} = \mathscr{K}_{\Gamma}(\varepsilon_{\mathscr{C}}, \varepsilon_{\mathscr{D}})$ als die Hülle der $\mathscr{A}_{\Gamma}^{\varepsilon}$-Morphismen

$$a_{u,v,w},\ e_v, f_v,\ i_v, j_v,\ t_{x,y},\ \Gamma(g)$$

mit $u, v, w \in \operatorname{Ob}(\mathscr{A}_{\Gamma}^{\varepsilon})$, $x, y \in \operatorname{Ob} \mathscr{K}_{\mathscr{C}}$, $g \in \operatorname{Mor}(\mathscr{K}_{\mathscr{C}})$. $\mathscr{K}_{\Gamma}$ ist wie $\mathscr{A}_{\Gamma}^{\varepsilon}$ eine Kategorie mit Gruppenstruktur, und durch Restriktion erhält man ein kommutatives Diagramm von monoidalen Funktoren,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{K}_{\mathscr{C}} \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathscr{K}_{\Gamma} \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \mathscr{C} \arrow[r, "\Gamma"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

in dem ε jeweils strikt und treu ist. Wir nennen $\Gamma: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ kohärent, wenn die Kategorien $\mathscr{K}_{\Gamma} = \mathscr{K}_{\Gamma}(\varepsilon_{\mathscr{C}}, \varepsilon_{\mathscr{D}})$ für alle $\varepsilon_{\mathscr{C}}$, $\varepsilon_{\mathscr{D}}$ atomar sind.

Im folgenden nehmen wir an, daß $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ bereits kohärent sind in bezug auf a, e, f, i, j.

SATZ 1.1. *Der monoidale Funktor* $\Gamma: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *ist genau dann kohärent, wenn für alle* $\mathcal{C}$*-Objekte* P, Q, N *das Diagramm* (D.1) *kommutativ ist.*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma((PQ)N) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\Gamma(a)"'] & \Gamma(PQ)\,\Gamma(N) \arrow[r, "\iota \cdot 1"] & (\Gamma(P)\,\Gamma(Q))\,\Gamma(N) \arrow[d, "a"] \\
\Gamma(P(QN)) \arrow[r, "\iota"] & \Gamma(P)\,\Gamma(QN) \arrow[r, "1 \cdot \iota"] & \Gamma(P)(\Gamma(Q)\,\Gamma(N))
\end{tikzcd}$$

$(\mathrm{D.1})_{P,Q,N}$

Beweis. Es sei $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ und $\varepsilon_{\mathcal{D}}$ fest gewählt, und (D.1) sei kommutativ. $\mathcal{K}'_{\mathcal{C}}$ sei die Hülle der $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$-Morphismen $a_{u,v,w}$, e_v, f_v mit $u, v, w \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$, und $\mathcal{K}'_{\Gamma}$ sei die Hülle der $\mathcal{K}_{\Gamma}$-Morphismen

$$a_{u,v,w},\ e_v,\ f_v,\ \Gamma(g)$$

mit $u, v, w \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_{\Gamma}$, $g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{K}'_{\mathcal{C}})$. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß $\mathcal{K}'_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{K}'_{\Gamma}$ atomar sind, so daß wir

$$\bar{\mathcal{K}}_{\mathcal{C}} = \mathcal{K}_{\mathcal{C}}/\mathcal{K}'_{\mathcal{C}} \qquad \text{und} \qquad \bar{\mathcal{K}}_{\Gamma} = \mathcal{K}_{\Gamma}/\mathcal{K}'_{\Gamma}$$

bilden können, (0.2). Die Gruppenstruktur von $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{K}_{\Gamma}$ induziert eine Gruppenstruktur auf den Kategorien $\bar{\mathcal{K}}_{\mathcal{C}}$ und $\bar{\mathcal{K}}_{\Gamma}$, wobei das Produkt nach Konstruktion assoziativ und unitär wird ($a, e, f = id$). Nach Konstruktion gilt $\Gamma(\mathcal{K}'_{\mathcal{C}}) \subset \mathcal{K}'_{\Gamma}$, so daß $\Gamma: \mathcal{K}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{K}_{\Gamma}$ einen monoidalen Funktor $\Gamma: \bar{\mathcal{K}}_{\mathcal{C}} \to \bar{\mathcal{K}}_{\Gamma}$ induziert. Es genügt zu zeigen, daß $\bar{\mathcal{K}}_{\Gamma}$ atomar ist, da $\mathcal{K}_{\Gamma}$ und $\bar{\mathcal{K}}_{\Gamma}$ äquivalent sind.

Es sei $s = \bar{s}$, das Einsobjekt in $\bar{\mathcal{K}}_{\mathcal{C}}$, bzw. $\bar{\mathcal{K}}_{\Gamma}$. Wir führen nun gewisse $\bar{\mathcal{K}}_{\Gamma}$-Morphismen $\lambda: \Gamma(s) \to s$ und $\kappa_v: \Gamma(v^{-1}) \to \Gamma(v)^{-1}$ ein, mit deren Hilfe sich $\mathrm{Mor}(\bar{\mathcal{K}}_{\Gamma})$ in einer einfachen Weise konstruieren läßt.

LEMMA 1.2. (a) *Es gibt genau einen* $\mathcal{D}$*-Morphismus* $\lambda: \Gamma(S_{\mathcal{C}}) \to S_{\mathcal{D}}$, *mit dem für alle* $P \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *die Diagramme* (D.2) *und* (D.3) *kommutativ sind.*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(PS) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\Gamma(e)"'] & \Gamma(P)\,\Gamma(S) \arrow[d, "1 \cdot \lambda"] \\
\Gamma(P) & \Gamma(P)\,S \arrow[l, "e"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Gamma(SP) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\Gamma(f)"'] & \Gamma(S)\,\Gamma(P) \arrow[d, "\lambda \cdot 1"] \\
\Gamma(P) & S\,\Gamma(P) \arrow[l, "f"']
\end{tikzcd}$$

$(\mathrm{D.2})_P$ $(\mathrm{D.3})_P$

(b) *Für* $P \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *gibt es genau einen* $\mathscr{D}$*-Morphismus* $\kappa_P \colon \Gamma(P^{-1}) \to \Gamma(P)^{-1}$, *mit dem die Diagramme* (D.4) *und* (D.5) *kommutativ sind, und* κ_P *ist natürlich in* P.

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma(PP^{-1}) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\Gamma(i)"'] & \Gamma(P)\,\Gamma(P^{-1}) \arrow[d, "1\cdot\kappa"] \\
\Gamma(S) \arrow[r, "\lambda"] & S & \Gamma(P)\,\Gamma(P)^{-1} \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Gamma(P^{-1}P) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\Gamma(j)"'] & \Gamma(P^{-1})\,\Gamma(P) \arrow[d, "\kappa\cdot 1"] \\
\Gamma(S) \arrow[r, "\lambda"] & S & \Gamma(P)^{-1}\,\Gamma(P) \arrow[l, "j"']
\end{tikzcd}
$$

$(\mathrm{D}.4)_P$ $(\mathrm{D}.5)_P$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für den monoidalen Funktor $\Gamma \colon \bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}} \to \bar{\mathscr{K}}_\Gamma$. Da der Funktor $\bar{\mathscr{K}}_\Gamma \to \bar{\mathscr{K}}_\Gamma$, $w \to \Gamma(s)\,w$, eine Äquivalenz ist, existiert genau ein $\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$-Morphismus $\lambda \colon \Gamma(s) \to s$, mit dem $(\mathrm{D}.2)_s$ kommutativ ist. Die Kommutativität von $(\mathrm{D}.1)_{v,s,s}$ für $v \in \mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}})$ besagt $1_{\Gamma(v)} \cdot t_{s,s} = t_{v,s} \cdot 1_{\Gamma(s)}$, so daß (D.6) kommutativ ist und dort

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma(v)\,\Gamma(s) \arrow[r, "1\cdot t"] \arrow[d, "1\cdot\lambda"'] & \Gamma(v)\,\Gamma(s)\,\Gamma(s) \arrow[d, "1\cdot\lambda"] \\
\Gamma(v) \arrow[r, "t"] & \Gamma(v)\,\Gamma(s)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Gamma(s)\,\Gamma(s) \arrow[r, "\lambda\cdot 1"] \arrow[d, "1\cdot\lambda"'] & \Gamma(s) \arrow[d, "\lambda"] \\
\Gamma(s) \arrow[r, "\lambda"] & s
\end{tikzcd}
$$

(D.6) (D.7)

$(1 \cdot \lambda) \circ t = id$ gilt. Damit ist $(\mathrm{D}.2)_v$ kommutativ. Da (D.7) kommutativ ist, gilt $1_{\Gamma(s)} \cdot \lambda = \lambda \cdot 1_{\Gamma(s)}$, und demnach ist $(\mathrm{D}.3)_s$ gleich $(\mathrm{D}.2)_s$. Aus $(\mathrm{D}.3)_s$ ergibt sich aber $(\mathrm{D}.3)_v$ analog wie $(\mathrm{D}.2)_v$.

Man definiere nun κ_v derart, daß $(\mathrm{D}.4)_v$ kommutativ ist. Dann ist zu zeigen, daß $(\mathrm{D}.5)_v$ kommutativ ist. Hierfür benutzen wir die Morphismen $\rho_u \colon u^{-1-1} \to u$, definiert als die Komposition

$$
u^{-1-1} \xrightarrow{i^{*}\cdot 1} uu^{-1}u^{-1-1} \xrightarrow{1\cdot i} u,
$$

für u aus $\mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}})$ oder $\mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}_\Gamma)$. Für $v \in \mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}})$ läßt sich nämlich $(\mathrm{D}.5)_v$ zusammensetzen aus $(\mathrm{D}.4)_{v^{-1}}$, $\Gamma(i_{v^{-1}}) = \Gamma(1_{v^{-1}} \cdot \rho_v)\,\Gamma(j_v)$, $[t_{v^{-1},-}, \rho_v]$, $\Gamma(v^{-1}) \cdot (\mathrm{D}.8)$, $[i, \kappa_v]$, $\langle \kappa_v, \rho_{\Gamma(v)} \rangle$, $i_{\Gamma(v)^{-1}} = (1_{\Gamma(v)^{-1}} \cdot \rho_{\Gamma(v)})\,j_{\Gamma(v)}$.

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma(v^{-1-1}) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\Gamma\rho"'] & \Gamma(v^{-1})^{-1} \arrow[d, "\kappa^{-1}"] \\
\Gamma(v) & \Gamma(v)^{-1-1} \arrow[l, "\rho"']
\end{tikzcd}
$$

(D.8)

Um nun die Kommutativität von (D.8) zu beweisen, setze man zunächst die Definition von ρ_v ein, also $\Gamma(\rho) = \Gamma(i^* \cdot 1)\,\Gamma(1 \cdot i)$. (D.8) läßt sich dann in folgende Teile zerlegen: $[t_{-,v^{-1-1}}, i_v]$, $(\mathrm{D}.3)_{v^{-1-1}}$, $(\mathrm{D}.4)_v \cdot \Gamma(v^{-1-1})$, $(\mathrm{D}.1)_{v,v^{-1},v^{-1-1}}$, $[t_{v,-}, i_{v^{-1}}]$, $(\mathrm{D}.2)_v$, $\Gamma(v) \cdot (\mathrm{D}.4)_{v^{-1}}$, $\Gamma(v) \cdot \langle \kappa_v, \kappa_{v^{-1}} \rangle$, $\langle i_{\Gamma(v)}, \kappa_{v^{-1}} \rangle$, $\Gamma(v) \cdot [i, \kappa_v]$, $\langle i_{\Gamma(v)}, \kappa_v^{-1} \rangle$.

Damit ist die Behauptung für $\Gamma: \bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}} \to \bar{\mathscr{K}}_\Gamma$ bewiesen. Um nun die $\mathscr{Q}$-Morphismen $\lambda: \Gamma(S_{\mathscr{C}}) \to S_{\mathscr{Q}}$ und $\kappa_P: \Gamma(P^{-1}) \to \Gamma(P)^{-1}$, $P \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, zu definieren, benutzen wir die Funktoren

$$\mathscr{Q} \xleftarrow{\varepsilon} \mathscr{K}_\Gamma \xrightarrow{\pi} \mathscr{K}_\Gamma / \mathscr{K}'_\Gamma .$$

Ohne Einschränkung gelte $P = \varepsilon(v)$ für ein $v \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$. Da π volltreu ist, hat man eindeutige $\mathscr{K}_\Gamma$-Morphismen $\lambda: \Gamma(\mathbf{s}) \to \mathbf{s}$ und $\kappa_v: \Gamma(v^{-1}) \to \Gamma(v)^{-1}$, $v \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$, als Urbilder der schon in $\mathscr{K}_\Gamma / \mathscr{K}'_\Gamma$ definierten λ und κ unter π. Es seien $\lambda: \Gamma(S_{\mathscr{C}}) \to S_{\mathscr{Q}}$ und $\kappa_P: \Gamma(P^{-1}) \to \Gamma(P)^{-1}$ die Bilder der $\mathscr{K}_\Gamma$-Morphismen λ und κ_v unter ε. Dann sind offenbar $(\mathrm{D}.2)_P$–$(\mathrm{D}.5)_P$ kommutativ. Daß κ jeweils natürlich ist, entnimmt man leicht der Definition. Damit ist Lemma 1.2 bewiesen.

Wir setzen den Beweis von Satz 1.1 fort. Die $\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$-Morphismen $k_{u,v}$: $(uv)^{-1} \to v^{-1}u^{-1}$ seien definiert wie in [7] als die Komposition

$$(uv)^{-1} \xrightarrow{j^* \cdot 1} v^{-1}v(uv)^{-1} \xrightarrow{1 \cdot j^* \cdot 1} v^{-1}u^{-1}uv(uv)^{-1} \xrightarrow{1 \cdot i} v^{-1}u^{-1}.$$

Es sei $\mathscr{E} = \mathscr{E}_\Gamma$ die Menge der $\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$-Morphismen

$$i_v, j_v, \rho_v, k_{u,v}, t_{x,y}, \lambda, \kappa_x, id_v$$

mit $u, v \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$, $x, y \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}}$, wobei jedoch $k_{u,v}$ und $t_{x,y}$ nur mit $u, v \neq s$ und $x, y \neq s$ gebildet werde; man beachte, daß $k_{u,s} = j_s^* \cdot 1_{u^{-1}}$ und $k_{s,v} = 1_{v^{-1}} \cdot j_s^*$ gilt [7, (43), (44)]. Durch Bildung von Expansionen, (0.3), definieren wir nun $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\Gamma$ und $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_\Gamma^*$ als

$$\mathbf{E} = \bigcup_{g \in \mathscr{E}} \mathbf{E}(g) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{E}^* = \bigcup_{g \in \mathscr{E}} \mathbf{E}(g^*). \tag{5}$$

Lemma 1.3. *Jeder Morphismus aus* $\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$ *ist eine Komposition von Elementen aus* $\mathbf{E}_\Gamma \cup \mathbf{E}_\Gamma^*$.

Beweis. Auf Grund der kommutativen Diagramme (D.4) und (D.5) ist klar, daß man in $\mathscr{E}_\Gamma$ auf die Morphismen $\Gamma(i)$ und $\Gamma(j)$ verzichten kann. Die Behauptung ergibt sich dann wie in [7, Lemma 2].

Wir definieren nun gewisse Rangfunktionen auf $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}}$ und $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$. Nach Konstruktion ist $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}}$ eine freie, assoziative unitäre Ω-Algebra über der Menge $\{\mathbf{s}^{-1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots\}$, und wir identifizieren $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}}$ kanonisch mit der

Menge $A \cup \{\mathbf{s}\}$, wobei A die kleinste Menge von Wörtern über dem Alphabet (1) ist mit:

$$\mathbf{s}^{-1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots \in A, \qquad \text{für} \quad u, v \in A \text{ ist } u \wedge v \text{ und } (u)^{-1} \text{ in } A.$$

Entsprechend identifizieren wir $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$ mit $A_\Gamma \cup \{\mathbf{s}\}$, wobei A_Γ die kleinste Menge von Wörtern über dem Alphabet (4) ist mit: $\mathbf{s}^{-1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots \in A_\Gamma$, für $x \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ ist $\mathbf{\Gamma}(x)$ in A_Γ, für $u, v \in A_\Gamma$ ist $u \wedge v$ und $(u)^{-1}$in A_Γ.

Für v aus $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ oder $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$ sei $n(v)$ die Länge von v, i.e., die Anzahl der Kopien von Elementen aus $\mathbf{N}$ enthalten in v. Man sieht leicht, daß eindeutige Abbildungen $\gamma\colon \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_{\mathscr{C}} \to \mathbb{N}$ und $\gamma\colon \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\Gamma \to \mathbb{N}$ existieren mit: $\gamma(u) = 0$ für $u \in \mathbf{N}$, $\gamma(u \cdot v) = \gamma(u) + \gamma(v)$, $\gamma(u^{-1}) = \gamma(u) + n(u)^3$ für $u, v \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$, bzw. $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$, und $\gamma(\Gamma(x)) = \gamma(x)$ für $x \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$. Ferner existiert eine eindeutige Abbildung $\phi\colon \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\Gamma \to \mathbb{N}$ mit: $\phi(u) = 0$ für $u \in \mathbf{N}$,

$$\phi(\Gamma(x)) = (n(x) + \gamma(x))^2 \qquad \text{für} \quad x \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_{\mathscr{C}},$$

$\phi(u \cdot v) = \phi(u) + \phi(v)$ und $\phi(v^{-1}) = \phi(v)$ für $u, v \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$. Für $v \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$ sei nun $rg(v) = rg_\Gamma(v)$ definiert durch

$$rg_\Gamma(v) = n(v) + \gamma(v) + \phi(v).$$

Ist $g\colon v \to w$ ein Morphismus aus $\mathbf{E}_\Gamma$, so gilt $rg_\Gamma(v) \geqslant rg_\Gamma(w)$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn g eine Expansion von id ist.

Sei nun $h\colon v \to v$ ein Endomorphismus aus $\bar{\mathscr{K}}_\Gamma$. Nach Lemma 1.3 läßt sich h schreiben als die Komposition von Elementen $h_v\colon v_v \to v_{v+1}$ aus $\mathbf{E}_\Gamma \cup \mathbf{E}_\Gamma^*$:

$$h = h_1 \circ h_2 \circ \cdots \circ h_n,$$

also $v_1 = v_{n+1} = v$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß eines der v_v gleich s ist, denn der Funktor $\bar{\mathscr{K}}_\Gamma \to \bar{\mathscr{K}}_\Gamma$, $w \to w \cdot v_v^{-1}$, ist eine Äquivalenz. Wir definieren

$$rg_\Gamma(h; h_1, \ldots, h_n) = \max_v rg_\Gamma(v_v),$$

und zeigen mit Induktion nach $rg_\Gamma(h; h_1, \ldots, h_n)$, daß $h = id_v$ gilt. Falls alle v_v denselben Rang haben, gilt $h_v = id_s$, $\forall v$, also $h = id_s$. Sei nun etwa $rg(v_1) > rg(v_2)$ und $rg(v_1) > rg(v_n)$. Wir zeigen, daß sich $h_n \circ h_1$ schreiben läßt als

$$v_n \xrightarrow{g_0} u_1 \xrightarrow{g_1} u_2 \cdots u_m \xrightarrow{g_m} v_2 \tag{7}$$

mit g_v aus $\mathbf{E}_\Gamma \cup \mathbf{E}_\Gamma^*$ und $rg(v_1) > rg(u_v)$ für $v = 1, \ldots, m$. Wendet man dies auf alle maximalen Elements unter den v_v an, so folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. Es ist h_1 die Expansion eines $q \in \mathscr{E}_\Gamma$ und h_n die Expansion eines p^* mit $p \in \mathscr{E}_\Gamma$. Es werde $h_0\colon v_1 \to v_n$ aus p so erzeugt wie h_n

aus p^*, so daß $h_0 = h_n^*$ gilt, und h_0 in $\mathbf{E}_\Gamma$ ist. Wenn p und q Expansionen von i, j, k, p sind, läßt sich (7) mit den Gleichungen aus [7] konstruieren. Wir können uns daher auf die Fälle $p = t_{x,y}, \lambda, \kappa_x$ beschränken. Für jede Wahl von q tritt dann aber eine der folgenden Situationen ein:

(i) h_0 läßt die Quelle von q invariant, oder h_1 läßt die Quelle von p invariant,

(ii) $q = i_w$ oder j_w, und die Quelle von p ist enthalten in w,

(iii) $p = q$, also $h_0 = h_1$.

In jedem dieser Fälle ist aber klar, wie man den Rang weiter erniedrigen kann, cf. [7], womit Satz 1.1 bewiesen ist.

2. Kohärenz einer natürlichen Transformation $\chi: \Lambda \to \Gamma$

Es seien $\Lambda, \Gamma: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ monoidale Funktoren zwischen Kategorien mit kohärenter Gruppenstruktur; Λ und Γ seien kohärent. Solche Funktoren nennen wir im folgenden Homomorphismen. Es sei eine natürliche Transformation $\chi: \Lambda \to \Gamma$ gegeben. Die Menge $\mathscr{A}_\chi$ von Wörtern über dem Alphabet

$$\wedge, (\ ,\ ), {}^{-1}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{s}, 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

sei rekursiv definiert durch: $\mathscr{A}_\Lambda, \mathscr{A}_\Gamma \subset \mathscr{A}_\chi$, mit $u, v \in \mathscr{A}_\chi$ sind auch $(u \wedge v)$, $(u)^{-1}$ in $\mathscr{A}_\chi$. Zu gegebenen Abbildungen $\varepsilon_{\mathscr{C}}: \mathbf{N} \to \operatorname{Ob} \mathscr{C}$ und $\varepsilon_{\mathscr{D}}: \mathbf{N} \to \operatorname{Ob} \mathscr{D}$ mit $\varepsilon(\mathbf{s}) = S$ lassen sich die Ω-Homomorphismen $\varepsilon: \mathscr{A}_\Lambda \to \operatorname{Ob} \mathscr{D}$ und $\varepsilon: \mathscr{A}_\Gamma \to \operatorname{Ob} \mathscr{D}$ aus Abschnitt 1 eindeutig zu einem Ω-Homomorphismus $\varepsilon: \mathscr{A}_\chi \to \operatorname{Ob} \mathscr{D}$ fortsetzen, und die Kategorie $\mathscr{A}_\chi^\varepsilon$ ist vermöge der natürlichen Transformationen a, e, f, i, j aus $\mathscr{D}$ eine Kategorie mit Gruppenstruktur. Nach Konstruktion hat man Homomorphismen

$$\Lambda: \mathscr{A}^\varepsilon \to \mathscr{A}_\chi^\varepsilon, \qquad \Gamma: \mathscr{A}^\varepsilon \to \mathscr{A}_\chi^\varepsilon, \tag{9}$$

und die $\mathscr{D}$-Morphismen $\chi_P: \Lambda(P) \to \Gamma(P)$, $P \in \operatorname{Ob} \mathscr{C}$, definieren eine natürliche Transformation χ zwischen diesen Funktoren (9). Die Unterkategorie $\mathscr{K}_\chi$ von $\mathscr{A}_\chi^\varepsilon$ sei definiert als die Hülle der $\mathscr{A}_\chi^\varepsilon$-Morphismen

$$a_{u,v,w}, e_v, f_v, i_v, j_v, \Lambda(g), \Gamma(g), t_{x,y}^\Lambda, t_{x,y}^\Gamma, \chi_v,$$

mit $u, v, w \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}_\chi^\varepsilon$, $g \in \operatorname{Mor} \mathscr{K}_{\mathscr{C}}$, $x, y \in \operatorname{Ob} \mathscr{K}_{\mathscr{C}}$. Durch Restriktion erhält man aus (9) Homomorphismen

$$\Lambda: \mathscr{K}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{K}_\chi, \qquad \Gamma: \mathscr{K}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{K}_\chi. \tag{10}$$

Wir nennen χ kohärent, wenn $\mathscr{K}_\chi = \mathscr{K}_\chi(\varepsilon_{\mathscr{C}}, \varepsilon_{\mathscr{D}})$ für alle $\varepsilon_{\mathscr{C}}$ und $\varepsilon_{\mathscr{D}}$ atomar ist.

SATZ 2.1. *Die natürliche Transformation* $\chi: \Lambda \to \Gamma$ *ist genau dann kohärent, wenn für alle* $P, Q \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *das Diagramm* (D.9) *kommutativ ist.*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(PQ) & \xrightarrow{\iota} & \Lambda(P)\Lambda(Q) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\chi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\chi\cdot\chi} \\ \Gamma(PQ) & \xrightarrow{\iota} & \Gamma(P)\Gamma(Q) \end{array}$$
$$(\mathrm{D}.9)_{P,Q}$$

Beweis. Wir bilden $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ wie in Abschnitt 1. $\mathscr{K}'_\chi$ sei die Hülle der $\mathscr{K}_\chi$-Morphismen

$$a_{u,v,w}, e_v, f_v, \Lambda(g), \Gamma(g)$$

mit $u, v, w \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_\chi$, $g \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{K}'_{\mathscr{C}}$. Dann ist $\mathscr{K}'_\chi$ atomar, und wir können $\bar{\mathscr{K}}_\chi = \mathscr{K}_\chi/\mathscr{K}'_\chi$ bilden. Dies ist in kanonischer Weise eine Kategorie mit Gruppenstruktur, und aus (10) erhält man Homomorphismen $\Lambda: \bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}} \to \bar{\mathscr{K}}_\chi$ und $\Gamma: \bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}} \to \bar{\mathscr{K}}_\chi$. Wir zeigen nun zunächst, daß in $\bar{\mathscr{K}}_\chi$ (also auch in $\mathscr{G}$) die Diagramme (D.10) und (D.11) kommutativ sind. (D.10) setzt sich zusammen

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(s) & \xrightarrow{\chi} & \Gamma(s) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\lambda} \\ s & \xrightarrow{id} & s \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \Lambda(v^{-1}) & \xrightarrow{\chi} & \Gamma(v^{-1}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\kappa} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\kappa} \\ \Lambda(v)^{-1} & \xrightarrow{\chi^{-1}} & \Gamma(v)^{-1} \end{array}$$

$$(\mathrm{D}.10) \qquad\qquad\qquad (\mathrm{D}.11)$$

aus: $[j, \chi_s]$, $\chi_s^{-1} \cdot (\mathrm{D}.9)_{s,s}$, $[j, \chi_s] \cdot \chi_s$. Damit erhält man (D.11) durch $\chi_v^{-1} \cdot (\mathrm{D}.10)$, $\chi_v^{-1} \cdot [\chi, i_v]$, $\chi_v^{-1} \cdot (\mathrm{D}.9)_{v,v^{-1}}$, $[j, \chi_v] \cdot \chi_{v^{-1}}$.

Es sei nun $\mathscr{E} = \mathscr{E}_\chi$ die Menge der $\bar{\mathscr{K}}_\chi$-Morphismen

$$i_v, j_v, k_{u,v}, \rho_v, t^\Lambda_{x,y}, t^\Gamma_{x,y}, \lambda^\Lambda, \lambda^\Gamma, \kappa^\Lambda_v, \kappa^\Gamma_v, \chi_v, id_v$$

mit $u, v \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\chi$, $x, y \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}}$, wobei wir verlangen, daß $k_{u,v}$, $t^\Lambda_{x,y}$, $t^\Gamma_{x,y}$ nur mit $u, v, x, y \neq s$ gebildet werden und

$$\chi_v \quad \text{nur mit} \quad v \in \mathbf{N}_s, \qquad \mathbf{N}_s = \mathbf{N} \setminus \{s\}. \tag{11}$$

Wir identifizieren $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\chi$ kanonisch mit der Menge $A_\chi \cup \{s\}$, wobei A_χ die kleinste Menge von Wörtern über dem Alphabet (8) ist mit: $A_\Lambda \cup A_\Gamma \subset A_\chi$, für $u, v \in A_\chi$ ist $u \wedge v$ und $(u)^{-1}$ in A_χ.

Man bilde nun $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\chi$ und $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}^*_\chi$ wie in (5). Dann gilt analog zu Lemma 1.3, daß jeder $\bar{\mathscr{K}}_\chi$-Morphismus eine Komposition von Elementen aus $\mathbf{E}_\chi \cup \mathbf{E}^*_\chi$ ist. Die Einschränkung (11) ist dabei zulässig auf Grund der kommutativen Diagramme (D.9)–(D.11).

Für $v \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_\chi$ sei $rg_\Gamma(v)$ wie in Abschnitt 1 definiert bei Nichtbeachtung des Operators Λ; analog sei $rg_\Lambda(v)$ definiert (bei Nichtbeachtung von Γ). Man setze

$$rg_\chi(v) = 2 \cdot rg_\Lambda(v) + rg_\Gamma(v).$$

Dann ist $rg_\chi(\Lambda(v)) = rg_\chi(\Gamma(v)) + 1$ für $v \in \mathbf{N}_s$, so daß χ_v und jede Expansion von χ_v diesen Rang erniedrigt. Ist nun $h = h_1 \circ \cdots \circ h_n$ ein $\bar{\mathscr{K}}_\chi$-Endomorphismus mit $h_v: v_v \to v_{v+1}$ aus $\mathrm{E}_\chi \cup \mathrm{E}_\chi^*$, so läßt sich $h = id$ wie zuvor mit Induktion nach $rg_\chi(h; h_1, \ldots, h_n) = \max_v rg_\chi(v_v)$ beweisen. Man braucht nur den neuen Fall "h_0 Expansion von χ_v, $v \in \mathbf{N}_s$" zu betrachten. Bei allen Möglichkeiten der Wahl von h_1 tritt stets einer der obigen Fälle (i), (ii), (iii) aus dem Beweis von Satz 1.1 ein.

3. Kategorien mit abelscher Gruppenstruktur

Es gelte nun, daß $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ mit einer kohärenten *abelschen* Gruppenstruktur versehen sei; in $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ ist also außerdem eine natürliche Transformation c wie in [7, IV] gegeben, die wir bei der Definition von $\mathscr{K}_\mathscr{C}$, $\mathscr{K}_\Gamma$ und $\mathscr{K}_\chi$ einbeziehen. Es gilt dann:

Satz 3.1. (a) *Γ ist genau dann kohärent, wenn außer* (D.1) *für alle P, $Q \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ das Diagramm* (D.12) *kommutativ ist.*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(PQ) \arrow[r, "\Gamma(c)"] \arrow[d, "\iota"'] & \Gamma(QP) \arrow[d, "\iota"] \\
\Gamma(P)\,\Gamma(Q) \arrow[r, "c"] & \Gamma(Q)\,\Gamma(P)
\end{tikzcd}$$

(D.12)

(b) *χ ist genau dann kohärent, wenn für alle P, $Q \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$* (D.9) *kommutativ ist.*

Beweis. Man kann wie beim Beweis von Satz 1.1 und Satz 2.1 verfahren mit folgenden Änderungen. Man ergänze $\mathscr{E}_\Gamma$ und $\mathscr{E}_\chi$ um die Morphismen $c_{u,v}$: $uv \to vu$, wobei man sich darauf beschränken kann, u und v nur aus

$$\mathbf{N}_s, \Gamma(\mathbf{N}_s), \mathbf{N}_s^{-1}, \Gamma(\mathbf{N}_s)^{-1}$$

zu wählen mit den zusätzlichen Einschränkungen $u \neq v$, $u \neq v^{-1}$, $v \neq u^{-1}$.

Die ist möglich auf Grund der folgenden fünf Diagramme und wegen der schon in [7, IV] aufgeführten Gleichungen.

$$\begin{tikzcd} N\Gamma(PQ) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "1\cdot t"'] & \Gamma(PQ)N \arrow[d, "t\cdot 1"] \\ N(\Gamma P\Gamma Q) \arrow[r, "c"] & (\Gamma P\Gamma Q)N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N\Gamma(S) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "1\cdot\lambda"'] & \Gamma(S)N \arrow[d, "\lambda\cdot 1"] \\ NS \arrow[r, "c"] & SN \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} N\Gamma(P^{-1}) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "1\cdot\kappa"'] & \Gamma(P^{-1})N \arrow[d, "\kappa\cdot 1"] \\ N\Gamma(P)^{-1} \arrow[r, "c"] & \Gamma(P)^{-1}N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} N\Lambda(S)^{-1} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "1\cdot\lambda^{-1}"'] & \Lambda(S)^{-1}N \arrow[d, "\lambda^{-1}\cdot 1"] \\ NS^{-1} \arrow[r, "c"] & S^{-1}N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N\Lambda(P) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "1\cdot\chi"'] & \Lambda(P)N \arrow[d, "\chi\cdot 1"] \\ N\Gamma(P) \arrow[r, "c"] & \Gamma(P)N \end{tikzcd}$$

Zu dem oben definierten Rang addiere man nun noch einen Ordnungsrang δ, definiert wie in [7] mit der zusätzlichen Vereinbarung: es sei $u < v$ für alle $u, v \in \mathbf{N}$, wenn v in einem $\mathbf{\Gamma}(\ )$ oder $\mathbf{\Lambda}(\ )$ enthalten ist, u jedoch nicht. Es genügt dann, h_1 als Expansion von c zu wählen, während h_0 Expansion von t, λ, κ oder χ ist. Hierbei treten jedoch nur Situationen von der obigen Form (i), (ii), (iii) auf.

4. Kohärenz einer G-Modulstruktur

$\mathscr{C}$ sei eine Kategorie mit einer kohärenten, abelschen Gruppenstruktur, und G sei eine Gruppe, die auf $\mathscr{C}$ operiere; das heißt, zu jedem $\sigma \in G$ hat man einen monoidalen Funktor $\sigma: \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ mit natürlichen Transformationen

$$\zeta \text{ von } 1: \mathscr{C} \to \mathscr{C} \text{ auf } Id_{\mathscr{C}},$$

$$\xi(\sigma, \tau) \text{ von } \mathscr{C} \xrightarrow{\sigma} \mathscr{C} \xrightarrow{\tau} \mathscr{C} \text{ auf } \mathscr{C} \xrightarrow{\sigma\tau} \mathscr{C},$$

wobei 1 das Einselement der Gruppe G bezeichne. Die zu dem monoidalen Funktor $\sigma: \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ gehörende natürliche Transformation t bezeichnen wir auch mit $t(\sigma)$. Wir nehmen an, daß die Funktoren σ und die natürlichen Transformationen ζ und $\xi(\sigma, \tau)$ kohärent sind im Sinn von Satz 3.1; dabei ist $\sigma \circ \tau$ ein Homomorphismus vermöge

$$t(\sigma \circ \tau)_{P,Q} = t(\sigma)^{\tau}_{P,Q}\, t(\tau)_{P\sigma, Q\sigma}.$$

Insbesondere sind also für alle P, Q, $N \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ und $\sigma, \tau \in G$ folgende Diagramme kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
(PQ)^\sigma \arrow[r, "c\sigma"] \arrow[d, "t"'] & (QP)^\sigma \arrow[d, "t"] \\
P^\sigma Q^\sigma \arrow[r, "c"] & Q^\sigma P^\sigma
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
((PQ)^\sigma)^\tau \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "t^\tau \circ t"'] & (PQ)^{\sigma\tau} \arrow[d, "t"] \\
(P^\sigma)^\tau (Q^\sigma)^\tau \arrow[r, "\xi \cdot \xi"] & P^{\sigma\tau} Q^{\sigma\tau}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (PQ)^1 \arrow[dl, "\zeta"'] \arrow[dr, "t"] & \\
PQ & & P^{1Q1} \arrow[ll, "\zeta \cdot \zeta"']
\end{tikzcd}$$

(D.13) (D.14) (D.15)

Um Kohärenz für die gesamte G-Modulstruktur zu definieren, verwenden wir wie zuvor gewisse Kategorien $\mathscr{A}_G^\varepsilon$ und $\mathscr{K}_G$. Die Menge $\mathscr{A}_G$ von Wörtern über der disjunkten Vereinigung

$$\{\wedge, (\,,), {}^{-1}\} \cup \mathbf{N} \cup G \tag{12}$$

sei rekursiv definiert durch: $\mathbf{N} \subset \mathscr{A}_G$, mit $u, v \in \mathscr{A}_G$ sind auch

$$(u \wedge v), \qquad (v)^{-1} \qquad \text{und} \qquad (v)^\sigma \quad \text{in} \quad \mathscr{A}_G, \qquad (\sigma \in G).$$

Wir bezeichnen $(v)^\sigma$ auch mit v^σ. Eine Abbildung $\varepsilon: \mathbf{N} \to \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ mit $\varepsilon(\mathbf{s}) = S_{\mathscr{C}}$ läßt sich eindeutig zu einem Ω-Homomorphismus

$$\varepsilon: \mathscr{A}_G \to \operatorname{Ob}\mathscr{C}$$

fortsetzen mit $\varepsilon(v^\sigma) = (\varepsilon(v))^\sigma$, $\forall v \in \mathscr{A}_G$, $\sigma \in G$. Die Kategorie $\mathscr{A}_G^\varepsilon$ ist mit den in $\mathscr{C}$ gegebenen natürlichen Transformationen eine Kategorie mit G-Modulstruktur. Die Unterkategorie $\mathscr{K}_G$ von $\mathscr{A}_G^\varepsilon$ sei rekursiv definiert durch: $\operatorname{Ob}\mathscr{K}_G = \operatorname{Ob}\mathscr{A}_G^\varepsilon = \mathscr{A}_G$, die Komponenten von

$$a, e, f, c, i, j, t(\sigma), \xi(\sigma, \tau), \zeta$$

sind in $\operatorname{Mor}\mathscr{K}_G$, mit $g, h \in \operatorname{Mor}\mathscr{K}_G$ ist auch $g \cdot h$, g^{-1}, $g \circ h$ (falls definiert), g^*, $g^\sigma (\sigma \in G)$ in $\operatorname{Mor}\mathscr{K}_G$.

Wir nennen die G-Modulstruktur von $\mathscr{C}$ kohärent, wenn die Kategorien $\mathscr{K}_G = \mathscr{K}_G(\varepsilon)$ für alle Abbildungen $\varepsilon: \mathbf{N} \to \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ mit $\varepsilon(\mathbf{s}) = S$ atomar sind.

SATZ 4.1. *Die G-Modulstruktur von $\mathscr{C}$ ist genau dann kohärent, wenn für alle P, $Q \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ und σ, τ, $\rho \in G$ die Diagramme* (D.16), (D.17) *und* (D.18) *kommutativ sind.*

$$\begin{tikzcd}
((P^\sigma)^\tau)^\rho \arrow[r, "\xi(\tau,\rho)"] \arrow[d, "\xi(\sigma,\tau)^\rho"'] & (P^\sigma)^{\tau\rho} \arrow[d, "\xi(\sigma,\tau\rho)"] \\
(P^{\sigma\tau})^\rho \arrow[r, "\xi(\sigma\tau,\rho)"] & P^{\sigma\tau\rho}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (P^\sigma)^1 \arrow[dl, "\zeta"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\
P^\sigma \arrow[rr, "id"] & & P^\sigma
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (P^1)^\sigma \arrow[dl, "\zeta^\sigma"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\
P^\sigma \arrow[rr, "id"] & & P^\sigma
\end{tikzcd}$$

(D.16) (D.17) (D.18)

Beweis. Wir gehen von $\mathscr{K}_G$ zu $\bar{\mathscr{K}}_G = \mathscr{K}_G/\mathscr{K}'_G$ über, wobei die atomare Unterkategorie $\mathscr{K}'_G$ von $\mathscr{K}_G$ definiert ist durch: $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}'_G = \mathrm{Ob}\,\mathscr{K}_G$, die Komponenten von a, e, f sind in $\mathrm{Mor}\,\mathscr{K}'_G$, mit $g, h \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{K}'_G$ ist $g \cdot h$, g^{-1}, $g \circ h$ (wenn definiert), g^*, $g^\sigma (\sigma \in G)$ in $\mathrm{Mor}\,\mathscr{K}'_G$. $\bar{\mathscr{K}}_G$ ist mit der durch $\mathscr{K}_G$ induzierten Struktur ebenfalls eine Kategorie mit einer G-Modulstruktur. Wir können $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_G$ kanonisch identifizieren mit $A_G \cup \{\mathbf{s}\}$, wobei die Mengen A_G von Wörtern über dem Alphabet (12) rekursiv definiert ist durch: $\mathbf{s}^{-1}$, $\mathbf{s}^\sigma$, $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots \in A_G$, mit $u, v \in A_G$ ist $u \wedge v$, $(u)^{-1}$ und $(u)^\sigma$ in A_G.

Es sei $\mathscr{E} = \mathscr{E}_G \subset \mathrm{Mor}\,\bar{\mathscr{K}}_G$ die Menge aller Morphismen

$$c_{u,v}, i_v, j_v, \rho_v, k_{u,v}, t(\sigma)_{u,v}, \lambda(\sigma), \kappa(\sigma)_v, \zeta_v, \xi(\sigma, \tau)_v, id_v,$$

$u, v \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_G$, $\sigma \in G$, mit folgenden Ausnahmen: bei $c_{u,v}$ ist u, v nur aus $\mathbf{N}_s$, $\mathbf{N}_s^{-1}$, $(\mathbf{N}_s)^\sigma$ oder $((\mathbf{N}_s)^\sigma)^{-1}$ mit $\sigma \neq 1$ aus G, und es ist $u \neq v$, $u \neq v^{-1}$, $v \neq u^{-1}$; bei $k_{u,v}$ und $t(\sigma)_{u,v}$ ist $u, v \neq \mathbf{s}$; bei ζ_v ist v aus $\mathbf{N}_s$.

Definiert man $\mathbf{E} = \mathbf{E}_G$, $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_G^*$ wie in (5), so ist jeder $\bar{\mathscr{K}}_G$-Morphismus eine Komposition von Elementen aus $\mathbf{E}_G \cup \mathbf{E}_G^*$. Daß die Einschränkungen für $c_{u,v}$, $k_{u,v}$ und $t(\sigma)_{u,v}$ erlaubt sind, sieht man analog wie oben, und daß die Einschränkung für ζ_v erlaubt ist, folgt aus (D.15), (D.18), (D.19) und (D.20). Letztere sind kommutativ mit (D.10) und (D.11).

$$\begin{tikzcd} & s^1 \arrow[dl, "\zeta"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ s \arrow[rr, "id"] & & s \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (v^{-1})^1 \arrow[dl, "\zeta"'] \arrow[dr, "\kappa"] & \\ v^{-1} & & (v^1)^{-1} \arrow[ll, "\zeta^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

(D.19) (D.20)

Man beachte, daß bei der Konstruktion von $\mathrm{Mor}\,\bar{\mathscr{K}}_G$ aus $\mathscr{E}_G$ nicht die Operatoren $\sigma \in G$ benutzt werden. Die ist möglich auf Grund von (D.13) und (D.14) und wegen der kommutativen Diagramme (D.4), (D.5) (mit $\Gamma \in G$), (D.16), (D.18), (D.21) und (D.22). Setzt man $\Gamma = \sigma\tau$, $\Lambda = \sigma \circ \tau$ und

$$\begin{tikzcd} (s^\sigma)^\tau \arrow[r, "\lambda(\sigma)^\tau"] \arrow[d, "\xi(\sigma,\tau)"'] & s^\tau \arrow[d, "\lambda(\tau)"] \\ s^{\sigma\tau} \arrow[r, "\lambda(\sigma\tau)"] & s \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} ((v^{-1})^\sigma)^\tau \arrow[rr, "\kappa(\sigma)^\tau"] \arrow[d, "\xi(\sigma,\tau)"'] & & ((v^\sigma)^{-1})^\tau \arrow[d, "\kappa(\tau)"] \\ (v^{-1})^{\sigma\tau} \arrow[r, "\kappa(\sigma\tau)"] & (v^{\sigma\tau})^{-1} & ((v^\sigma)^\tau)^{-1} \arrow[l, "\xi(\sigma,\tau)^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

(D.21) (D.22)

$\chi = \xi(\sigma, \tau)$, so ist (D.21) gleich (D.10) und (D.22) gleich (D.11). Hierbei beachte man die Gleichungen

$$\lambda(\sigma \circ \tau) = \lambda(\sigma)^\tau \circ \lambda(\tau), \qquad \kappa(\sigma \circ \tau) = \kappa(\sigma)^\tau \circ \kappa(\tau).$$

die sich aus den Definitionen von λ und κ ergeben (die zweite Gleichung folgt mit Hilfe der ersten).

Im folgenden sei $n(v)$ und $\gamma(v)$ für $v \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_G$ definiert wie in Abschnitt 1 (für $v \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_{\mathscr{C}}$) bei Nichtbeachtung der Operatoren $\sigma \in G$. Man hat ferner eine Abbildung ϕ: $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_G \to \mathbb{N}$ mit: $\phi(u) = 0$ für $u \in \mathbf{N}$, $\phi(u \cdot v) = \phi(u) + \phi(v)$, $\phi(v^{-1}) = \phi(v)$ und

$$\phi(v^\sigma) = \phi(v) + (n(v) + \gamma(v))^2$$

für alle $u, v \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_G$, $\sigma \in G$. Jede Expansion von $t(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$, $\kappa(\sigma)$, ζ, $\xi(\sigma, \tau)$ aus $\mathbf{E}$ erniedrigt ϕ, während ϕ von den anderen Elementen aus $\mathbf{E}$ zumindest nicht erhöht wird. Wir verwenden außerdem einen Ordnungsrang $\delta(v)$, bei dem auch die Symbole aus G zu berücksichtigen sind. Sei v aus $\mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_G$ und μ eine natürliche Zahl, $1 \leqslant \mu \leqslant n(v)$; $v(\mu)$ bezeichne dasjenige $\mathbf{N}$-Element, das in v an μ-ter Stelle steht. Es seien $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ diejenigen Elemente aus G, für die $v(\mu)$ als Bestandteil von v enthalten ist in $(\ )^{\sigma_1}, \ldots, (\ )^{\sigma_m}$, wobei $(\ )^{\sigma_\nu}$ auch in $(\ )^{\sigma_{\nu+1}}$ enthalten sei, $\nu = 1, \ldots, m-1$; wir setzen

$$\sigma(v, \mu) = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m.$$

Falls solche σ_ν nicht existieren, sei $\sigma(v, \mu) = 1$. Wir geben uns nun auf G irgendeine lineare Ordnung $<$ vor. Für natürliche Zahlen μ und ν, $1 \leqslant \mu \leqslant \nu \leqslant n(v)$, definieren wir

$$\delta_v(\mu, \nu) = 1,$$

falls keine der folgenden Aussagen zutrifft: (a) $\sigma(v, \mu) < \sigma(v, \nu)$, (b) $\sigma(v, \mu) = \sigma(v, \nu)$ und $v(\mu) \leqslant v(\nu)$. Trifft eine der Aussagen zu, so sei $\delta_v(\mu, \nu) = 0$. Wir setzen

$$\delta(v) = \sum_{\mu=1}^{n(v)} \sum_{\nu=\mu}^{n(v)} \delta_v(\mu, \nu).$$

Ist $h: x \to y$ eine Expansion von $p \in \mathscr{E}_G$, $p \neq c_{u,v}$, $k_{u,v}$, so sieht man ohne Schwierigkeit, daß $\delta(x) \geqslant \delta(y)$ gilt. Für jedes $v \in \mathrm{Ob}\,\bar{\mathscr{K}}_G$ sei

$$rg_G(v) = n(v) + \gamma(v) + \phi(v) + \delta(v).$$

Jede Expansion eines Elementes $p \neq id_v$, $c_{u,v}$ aus $\mathscr{E}$ erniedrigt diesen Rang; für $k_{u,v}$ folgt dies aus $\delta(v) \leqslant \frac{1}{2}(n(v)^2 - n(v))$, cf. [7, IV]. Eine Expansion von $c_{u,v} \in \mathscr{E}_G$ erniedrigt δ und damit rg_G genau dann, wenn $\delta(u) > \delta(v)$ gilt (man beachte $n(u) = n(v) = 1$). Die Behauptung $h = id$ für die Automorphismen h aus $\bar{\mathscr{K}}_G$ läßt sich nun wie zuvor mit Induktion nach $rg_G(h; h_1, \ldots, h_n) = \max_\nu rg_G(v_\nu)$ beweisen, wobei

$$v_1 \xrightarrow{h_1} v_2 \xrightarrow{h_2} \cdots v_n \xrightarrow{h_n} v_1$$

eine Darstellung von h als Komposition von Elementen aus $\mathrm{E}_G \cup \mathrm{E}_G^*$ ist. Es genügt, die Möglichkeiten "h_0 Expansion von $t(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$, $\kappa(\sigma)$, ζ, $\xi(\sigma, \tau)$" zu untersuchen. Wieder treten hier nur die Situationen (i), (ii), (iii) wie im Beweis von Satz 1.1 auf.

LITERATUR

1. D. B. A. EPSTEIN, Functors between tensored categories, *Invent. Math.* **1** (1966), 221–228.
2. A. HATTORI, On groups $\mathbf{H}^n(S, G)$ and the Brauer group of commutative rings, *Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo* **28** (1978), 1–20.
3. G. M. KELLY AND S. MACLANE, Closed coherence for a natural transformation, *in* "Coherence in Categories" (G. M. Kelly *et al.*, Ed.), pp. 1–28, Lecture Notes in Mathematics No. 281, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1972.
4. M. L. LAPLAZA, Considerations motivated by [7], (Sept. 1980).
5. G. LEWIS, Coherence for a closed functor, *in* "Coherence in Categories," pp. 148–195, Lecture Notes in Mathematics No. 281, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1972.
6. A. SOLIAN, Coherence in categorical groups, *Comm. Algebra* **9** (1981), 1039–1057.
7. K.-H. ULBRICH, Kohärenz in Kategorien mit Gruppenstruktur, *J. Algebra* **72** (1981), 279–295.